

PÕHIKOOLI KORDAMISE TÖÖ

I

1. Arvuta avaldise $\left(2,6 + 1\frac{2}{3}\right) \div 2\frac{2}{3} - 2^{-3} \cdot 4^0$ täpne väärtus.
2. Lihtsusta avaldis $\frac{4x}{1-x} + \left(\frac{2x}{x^2-4} + \frac{4}{x^2-2x} + \frac{2}{x}\right) \div \frac{x^2-1}{x^2-4}$.
3. Lahenda võrrandisüsteem
$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 2y - 4x = 5 \end{cases}$$
4. Mantel maksis 2400 krooni. Mantli hind tõusis algul 10% ja seejärel veel 15%. Kui suur oli lõpuks mantli hind ?
5. Täisnurkse trapetsi alused on 16 cm ja 9 cm. Leia trapetsi pindala, kui selle teravnurk on 30° .
6. Millise k väärtuse korral on võrrandi $x^2 - 4x - k = 0$ üks lahend -3 ? Leia ka teine lahend.
7. Joonista funktsiooni $y = 3x - 2$ graafik ja leia graafikult funktsiooni väärtus, kui argumenti väärtus on -2.
8. Laev sõitis jõel ühest linnast teise, millede vahemaa on 24 km. Edasi-tagasi sõiduks kulus laeval 5 tundi. Kui suur oli laeva kiirus seisvas vees, kui voolu kiirus oli $2\frac{km}{h}$.

PÕHIKOOLI KORDAMISE TÖÖ

II

1. Arvuta avaldise $\left(1,2 + \frac{2}{15}\right)^{-2} \div 2\frac{1}{4} - 4 \cdot 0,125^{-1}$ täpne väärtus.
2. Lihtsusta avaldis $\left(\frac{3a-1}{3a} - \frac{1}{3a-9a^2} - \frac{3a}{3a-1}\right) \div \frac{2}{a^2-a}$.
3. Lahenda võrrandisüsteem
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 - 2y = -7 \end{cases}$$
4. Nisuteradest saab 80% jahu. Saia küpsetamisel suureneb maa kasutatud jahuga võrreldes 35%. Kui palju saia saab 80 kg teradest ?
5. Rombi üks nurk on 50° ja lühem diagonaal on 7 cm. Leia rombi pindala.
6. Leia parameetri p väärtus, mille korral võrrandi $x^2 + px + 6 = 0$ lahendid on täisarvulised.
7. Joonista funktsiooni $y = -2x + 3$ graafik ja leia sellelt, millise argumenti väärtuse korral on funktsiooni väärtus 5.
8. Auto sõitis 200 km vahemaad 1,5 tunni võrra kiiremini kui buss, sest auto keskmine kiirus oli $30\frac{km}{h}$ võrra suurem. Kui suur oli bussi keskmine kiirus ?

TEOORIA 1 : HULGAD

Hulk on matemaatikas põhimõiste, mida ei defineerita ja temani jõutakse intuiitselt. Enamasti kasutatakse näiteid.

Iga hulk koosneb elementidest.

Määratud hulga definitsioon: Hulk on **määratud**, kui on olemas eeskiri, mille abil on võimalik otsustada kas vaadeldav element kuulub määratud hulka või mitte.

Hulki tähistatakse suurte tähtedega: A; B; C; D; ...

Hulga elemente tähistatakse väikeste tähtedega : a; b; c; d; ...

Asjaolu, et element a_3 kuulub hulka C tähistatakse : $a_3 \in C$ (kuulub hulka).

$a_4 \notin D$ (ei kuulu hulka)

Näide:

$$A = \{2;3;5;7\}$$

Definitsioon: Hulka, milles ei leidu ühtegi elementi, nimetatakse **tühjaks hulgaks**.

Definitsioon: Hulga A **osahulgaks** nimetatakse hulka B, kui hulga B iga element kuulub ka hulka A ($B \subset A$).

Definitsioon: Hulka, mis koosneb elementidest, mis kuuluvad vähemalt ühte hulkadest A või B, nimetatakse hulkade A ja B **ühendiks** ($A \cup B$).

Näide:

$$A = \{1;2;3\}$$

$$B = \{2;3;4\}$$

$$A \cup B = \{1;2;3;4\}$$

Definitsioon: Hulka, mis koosneb elementidest, mis on ühised hulkadele A ja B, nimetatakse hulkade A ja B **ühisosaks** ($A \cap B$).

Näide:

$$A = \{2;3;4;5\}$$

$$B = \{2;3;6;7\}$$

$$A \cap B = \{2;3\}$$

Definitsioon: Hulka, mis koosneb elementidest, mis kuuluvad hulka B, kuid ei kuulu hulka A, nimetatakse hulkade A ja B **vaheks** ($B \setminus A$).

Näide:

$$A = \{1;2;3\}$$

$$B = \{3;4;5\}$$

$$B \setminus A = \{4;5\}$$

TEOORIA 2 : NATURAALARVUD

Naturaalarvude hulk on ajalooliselt kõige tuntum ja uuritum. Olenevalt käsitlusest 0 kas on naturaalarv või mitte. **Naturaalarvude** all mõistame arve 1; 2; 3; ...

Iga kahe naturaalarvu a ja b vahel kehtib üks seostest : $a = b$; $a < b$; $a > b$.

Naturaalarvude hulga tähis on IN .

Naturaalarvude hulk on **kinnine** liitmise ja korrutamise suhtes, s.t. kui valida mingit 2 suvalist naturaalarvu, siis nende summa ja korrutis on alati naturaalarv.

Näide:

$$1 + 2 \in IN$$

$$101 + 3 \in IN$$

$$10 \cdot 11 \in IN$$

Iga kahe naturaalarvu puhul on naturaalarvude hulgal järgmised omadused, mis puudutavad ainult liitmist ja korrutamist:

- 1) $a + b = b + a \quad \forall a; b \in IN$ (liitmise kommutatiivsus)
- 2) $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a; b \in IN$ (korrutamise kommutatiivsus)
- 3) $a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall a; b; c \in IN$ (liitmise assotsiatiivsus)
- 4) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall a; b; c \in IN$ (korrutamise assotsiatiivsus)
- 5) $a \cdot (b + c) = ab + ac \quad \forall a; b; c \in IN$ (korrutamise distributiivsus liitmise suhtes)

TEORIA 3 : JUURDE- JA MAHAARVAMISE VALEM

Olgu meil N eset, mille seast mõningatel on omadused $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n$.

Seejuures ei pruugi mõnel esemel olla ühtki mainitud omadust või on tal neid 1 kuni n .

Tähistame $N(\alpha_i; \alpha_j; \dots; \alpha_k)$ kaudu nende esemete arvu, millel on omadused $\alpha_i; \alpha_j; \dots; \alpha_k$.

Omaduse puudumist tähistame primiga : $N(\alpha_1 \alpha_2 \alpha'_4)$ - omadused 1 ja 2 on; omadust 4 pole.

Juurde- ja mahaarvamise valem:

$$N(\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_n) = N - N(\alpha_1) - \dots - N(\alpha_n) + N(\alpha_1 \alpha_2) + N(\alpha_1 \alpha_3) + \dots + N(\alpha_1 \alpha_n) + \\ + N(\alpha_2 \alpha_3) + \dots + N(\alpha_2 \alpha_n) + \dots + N(\alpha_{n-1} \alpha_n) - N(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) - \dots - N(\alpha_{n-2} \alpha_{n-1} \alpha_n) + \dots + (-1)^n N(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)$$

Seega, et leida nende esemete arvu, millel pole ühtki antud omadustest, tuleb koguarvust lahutada nende esemete arv, millel on paaritu arv omadusi. Seejärel liita nende esemete arv, millel on paarisarv omadusi jne.

Näide:

Keeltkursusel õpib 63 inimest. Inglise keelt õpib 48 ja saksa keelt 14 inimest, kusjuures 9 õpivad mõlemat keelt korraga. Mitu inimest õpivad teisi keeli (ei õpi saksa ega inglise keelt)?

Lahendus:

Tähistame inglise keele oskuse α_1 ja saksa keele oskuse α_2 .

Seega:

$$N(\alpha_1) = 48$$

$$N(\alpha_2) = 14$$

$$N(\alpha_1 \alpha_2) = 9$$

Vastavalt valemile:

$$N(\alpha'_1 \alpha'_2) = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) + N(\alpha_1 \alpha_2) = 63 - 48 - 14 + 9 = 10$$

Vastus: Inimesi, kes ei õpi kursustel saksa ega inglise keelt, on 10.

NB! N. Vilenkin „Kombinatorika”

TEOORIA 4 : ALGARVUD

Definitsioon: Algarvuks nimetatakse ühest suuremat naturaalarvu, mis jagub ainult iseendaga ja ühega.

$$IP = \{2;3;5;7;\dots\}$$

Eukleidese teoreem: Algarvude hulk on lõpmatu.

Eeldus: Olgu reastatud kõik algarvud 2-st kuni algarvuni P: 2; 3; 5; 7; ...; P

Väide: Selles algarvude jadas ei ole kõik algarvud.

Tõestus: Moodustame arvu $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot P + 1$

Tekkinud arv võib olla:

1) algarv

Sellisel juhul on aga N uus algarv, mida eelduses antud jadas pole, sest N ei võrdu ilmselt ühegi arvude jadas 2; 3; 5; 7; ...; P.

Näiteks: Olgu antud algarvud 2; 3; 5, siis saame uue algarvu $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$. Tõepoolest, arv N = 31 ei sisaldu algarvude jadas 2; 3; 5.

2) kordarv

Kui N on kordarv, siis võime kirjutada $N = q \cdot N_1$, kus q on uus algarv. Arvu

$N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot P + 1$ kujust on näha, et N ei jagu algarvudega 2; 3; 5; ...; P (tekib jääk).

Näiteks: Olgu antud algarvud 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17, siis saame uue algarvu

$N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 + 1 = 510511$. Tõepoolest arvu N = 510511 saame esitada korrutisena $510511 = 19 \cdot 26869$. Algarv 19 ei sisaldu algarvude jadas 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17.

m.o.t.t.

Algarvude paare, mis erinevad üksteisest kahe võrra, nimetatakse kaksikalgarvudeks (11 ja 13; 17 ja 19; 29 ja 31 jne.)

On üks algarvude kolmik 3; 5; 7.

Algarvude nelik 11; 13; 17; 19 või 101; 103; 107; 109.

Ülesannete lahendamisel on vaja teada, kas mingi arv või avaldis jagub antud arvuga. Lahendamist hõlbustavad arvude jaguvuse omadused, mida teatakse jaguvustunnuste nime all.

1. **Arv jagub 2-ga**, siis kui arvu üheliste number on paarisarv, vastasel juhul mitte.
2. **Arv jagub 3-ga**, siis kui arvu ristsumma jagub 3-ga, vastasel juhul mitte.
3. **Arv jagub 4-ga**, siis kui arv lõpeb kahe nulliga või kahest viimasest numbrist moodustatud arv jagub 4-ga, vastasel juhul mitte. (500; 624)
4. **Arv jagub 5-ga** parajasti siis, kui ta lõpeb numbriga 5 või 0. (6665; 710)
5. **Arv jagub 8-ga** parajasti siis, kui ta lõpeb kolme nulliga või kui arvu kolmest viimasest numbrist moodustatud arv jagub 8-ga. (5000; 14688)
6. **Arv jagub 9-ga** parajasti siis, kui tema ristsumma jagub 9-ga. (981)
7. **Arv jagub 10-ga** parajasti siis, kui ta lõpeb numbriga null.
8. **Arv jagub 25-ga** parajasti siis, kui arvu kaks viimast numbrit on 00, 25, 50 või 75.

9. Arv jagub 50-ga parajasti siis, kui arvu kaks viimast numbrit on 00 või 50.
10. Arv jagub 100-ga parajasti siis, kui ta lõpeb kahe nulliga.
11. Arv jagub 6-ga parajasti siis, kui ta jagub 2-ga ja 3-ga. (31242)
12. Arv jagub 12-ga parajasti siis, kui ta jagub 3-ga ja 4-ga. (216)
13. Arv jagub 18-ga parajasti siis, kui ta jagub 2-ga ja 9-ga. (9396)
14. Arv jagub 7-ga, 11-ga ja 13-ga parajasti siis, kui arvu kolmest viimasest numbrist moodustatud arvu ja ülejäänud numbritest moodustatud arvu vahe (või vastupidi) jagub vastavalt 7-ga, 11-ga või 13-ga.
Arv 251321 jagub 7-ga, kuna $321-251=70$ jagub 7-ga.
Arv 211112 jagub 11-ga, kuna vahe $211-112=99$ jagub 11-ga.
Arv 32123 jagub 13-ga, kuna vahe $123-32=91$ jagub 13-ga.

TEORIA 5 : ARVUDE VÄHIM ÜHISKORDNE

Definitsioon: Antud arvude ühiskordseteks nimetatakse arve, mis jaguvad iga antud arvuga.

Definitsioon: Antud arvude vähimaks ühiskordseks nimetatakse vähimat nullist erinevat arvu, mis jagub iga antud arvuga.

Vähima ühiskordse leidmiseks lahutatakse antud arvud algteguriteks. Saadud algtegurite astmete seast valitakse välja kõigi erinevate algarvude suurima astendajaga astmed. Nende astmete korrutis ongi vähim ühiskordne.

Näide:

Leiame arvude 360; 140 ja 35 vähima ühiskordse.

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$35 = 5 \cdot 7$$

$$VÜK(360;140;35) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$$

Vähima ühiskordse leidmiseks on otstarbekas kasutada järgmist omadust:

Vähim ühiskordne on suurima arvu korrutis teiste arvude nende algteguritega, mis suurimas arvus ei esine.

Eelmises näites seega $VÜK(360;140;35) = 2520$

Näide:

Esimene laev jõuab tagasi sadamasse A iga 8 päeva järel, teine laev 10 päeva järel ja kolmas 15 päeva järel. Missuguse kõige lühema aja möödudes kohtuvad sadamas A esimene ja teine laev, esimene ja kolmas laev, kõik kolm laeva, kui laevad lahkusid sadamast üheaegselt?

TEORIA 6 : ARVUDE SUURIM ÜHISTEGUR

Definitsioon: Antud arvude ühisteguriteks nimetatakse arve, millega jaguvad kõik antud arvud.

Definitsioon: Antud arvude suurimaks ühisteguriks nimetatakse suurimat arvu, millega jagub igaüks antud arvudest.

Kui arvude suurim ühistegur on 1, siis neid arve nimetatakse ühistegurita arvudeks.

Suurimat ühistegurit leitakse järgmiste reeglite abil:

- 1. reegel:** Arvude suurima ühisteguri leidmiseks lahutatakse kõik need arvud algtegureiks ja kirjutatakse välja algtegurid, mis on ühised kõikidele antud arvudele. Nende algtegurite astendajateks võetakse vastava algteguri vähim astendaja, mis esineb vaadeldavate arvude algtegureiks lahutustes. Saadud astmete korrutis ongi suurim ühistegur.

Näide:

$$1092 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$$

$$540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$$

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$SÜT(1092;540;360) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

- 2. reegel (Eukleidese algoritm):** Kahe arvu suurima ühisteguri leidmiseks jagatakse suurem arv väiksemaga, seejärel jagaja jäägiga, uuesti jagaja jäägiga jne., kuni jäägiks on 0. Viimane nullist erinev jääk ongi nende arvude suurim ühistegur.
- 3. reegel:** Kolme ja enama arvu suurima ühisteguri leidmiseks Eukleidese algoritmi abil leitakse kahe arvu suurim ühistegur. Seejärel leitakse saadud suurima ühisteguri ja mingi kolmanda arvu suurim ühistegur. Viimasele leitakse suurim ühistegur neljanda arvuga jne. Viimase paari suurim ühistegur ongi antud arvude suurimaks ühisteguriks.

TEOORIA 7: PAARISARVUD JA PAARITUD ARVUD

Naturaalarvude hulka saab jaotada paarisarvude hulgaks $IA = \{0;2;4;\dots\}$ ja paaritute arvude hulgaks $IB = \{1;3;5;\dots\}$.

Paarisarvu üldkuju on $2n$, $n \in IN$.

Paaritu arvu üldkuju on $2n+1$, $n \in IN$.

Paarisarvude hulk on lõpmatu järjestatav punktihulk ning kinnine liitmise ja korrutamise suhtes.

Paaritute arvude hulk on lõpmatu järjestatav punktihulk ning kinnine korrutamise suhtes.

TEORIA 8: TÄISARVUD

Täisarvude hulk on lõpmatu järjestatav punktihulk ning kinnine liitmise, lahutamise ja korrutamise suhtes.

Täisarvude hulga tähis on Z .

$$Z = Z^+ \cup Z^- \cup \{0\}$$

$-n \wedge n$ on teineteise vastand arvud

TEOORIA 9: RATSIONAALARVUD

Definitsioon: Ratsionaalarvuks nimetatakse sellist arvu, mis avaldub jagatisena $\frac{m}{n}$, kus $m \in Z$, $n \in Z$ ja $n \neq 0$.

Ratsionaalarvude hulga tähis on Q $Q = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in Z, n \neq 0 \right\}$

Ratsionaalarvud jagunevad nagu täisarvudki positiivseteks ja negatiivseteks.

Et naturaalarvud ja täisarvud on ka ratsionaalarvud, siis kehtivad seosed : $IN \subset Q$ ja $Z \subset Q$.

Murdu $\frac{m}{n}$ nimetatakse harilikuks murruks.

Omadused: Tehed murdudega on määratud järgmiselt :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c, \text{ kus } b \neq 0, d \neq 0;$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \text{ kus } b \neq 0, d \neq 0;$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}, \text{ kus } b \neq 0, d \neq 0;$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \text{ kus } b \neq 0, d \neq 0;$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}, \text{ kus } b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0.$$

Ratsionaalarvude hulk on kinnine kõigi aritmeetiliste tehete suhtes (v.a. nulliga jagamine)

Teoreem: Iga kahe erineva ratsionaalarvu vahel leidub ratsionaalarv.

Eeldus: Olgu a ja c ratsionaalarvud, $a < c$.

Väide: Leidub ratsionaalarv b nii, et $a < b < c$

Tõestus: Et $a < c$, siis kehtib ilmselt seos $\frac{a+a}{2} < \frac{a+c}{2} < \frac{c+c}{2}$

$$a < \frac{a+c}{2} < c$$

Valides $b = \frac{a+c}{2}$ $a < b < c$

Kuna a ja c on suvaliselt valitud, siis tõesti iga kahe ratsionaalarvu vahel leidub ratsionaalarv (aritmeetiline keskmine).

m.o.t.t.

Omadus: Et iga kahe mittevõrdse ratsionaalarvu vahel leidub veel lõpmata palju ratsionaalarve, siis öeldakse, et ratsionaalarvude hulk on tihe.

TEOORIA 10: IRRATSIONAALARVUD

Esiteks tõestame teoreemi, millest järeldub, et on arve, mis ei ole ratsionaalsed.

Teoreem: Ühikruudu diagonaali pikkus ei esitu ratsionaalarvuna.

Eeldus: Olgu antud ruut külje pikkusega 1.

Väide: Ruudu diagonaali pikkus pole ratsionaalarv.

Tõestus: Vastavalt Pythagorase teoreemile ruudu diagonaal $d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Oletame vastuväiteliselt, et $\sqrt{2}$ on siiski ratsionaalarv. Kui nii, siis peab leiduma murd $\frac{m}{n}$

nii, et $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$ ($m \neq k \cdot n$).

Tõstes selle võrduse ruutu: $\frac{m^2}{n^2} = 2$, millest $m^2 = 2n^2$.

Viimasest võrdusest ilmneb, et m peab olema paarisarv, sest võrduse paremal poolel on tegur 2 ning paarisarvu ruut on alati samuti paarisarv. Seega $m = 2k$ ning asendades $4k^2 = 2n^2$.
 $2k^2 = n^2$.

Seega on ka n paarisarv. Kui aga m ja n on mõlemad paarisarvud, siis murd $\frac{m}{n}$ pole

taandatud (jagub kahega). Saime vastuolu. Murd $\frac{m}{n}$ pidi olema taandumatu, kuid selgus, et m ja n on paarisarvud ja seega murdu on võimalik jagada 2-ga. Et aga ratsionaalarvu saab alati avaldada taandatud murruna, siis pole $\sqrt{2}$ ratsionaalarv.

m.o.t.t.

Teame, et lõplikud ja lõpmatud perioodilised kümnendmurrud on ratsionaalarvud, seega:

Definitsioon: Arvu, mis avaldub lõpmatu mitteperioodilise kümnendmurruna, nimetatakse irratsionaalarvuks.

Irratsionaalarvude hulga tähis on I.

Näide:

$$\sqrt{2} = 1,4142136\dots$$

$$\sqrt[3]{7} = 1,9129312\dots$$

$$\pi = 3,1415927\dots$$

Omadus: Irratsionaalarvude hulk on lõpmatu.

Omadus: Et iga kahe mittevõrdse irratsionaalarvu vahel leidub veel lõpmata palju irratsionaalarve, siis öeldakse, et irratsionaalarvude hulk on tihe.

TEOORIA 11: REAALARVUD

Iga lõpmatut kümnendmurdu, mis ei lõpe numbriga 9 perioodis, nimetatakse reaalarvuks. Reaalarvude hulka tähistatakse \mathbb{R} .

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Reaalarvude hulk on kinnine kõigi nelja aritmeetilise tehte suhtes.

Omadus: Reaalarvude hulk on pidev, s.t. arvtelje igale punktile vastab üks kindel arv ning vastupidi.

Omadus: Reaalarvude hulk on järjestatud: iga kahe erineva reaalarvu a ja b korral on õige üks väidetest $a = b$; $a < b$; $a > b$.

Omadused :

1. $\forall a; b \in \mathbb{R}$ korral $a + b = b + a$ (liitmise kommutatiivsus)
2. $\forall a; b; c \in \mathbb{R}$ korral $(a + b) + c = a + (b + c)$ (liitmise assotsiatiivsus)
3. $\forall a; b \in \mathbb{R}$ korral on võrrandil $b + x = a$ olemas lahend $x = a - b$
4. $\forall a; b \in \mathbb{R}$ korral $a \cdot b = b \cdot a$ (korrutamise kommutatiivsus)
5. $\forall a; b; c \in \mathbb{R}$ korral $(a + b) + c = a + (b + c)$ (liitmise assotsiatiivsus)
6. $\forall a; b; c \in \mathbb{R}$ korral $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (korrutamise assotsiatiivsus)
7. $\forall a; b \in \mathbb{R}$ korral on võrrandil $b + x = a$ olemas lahend $x = a - b$
8. $\forall a; b \in \mathbb{R}$ ja $b \neq 0$ korral on võrrandil $b \cdot x = a$ olemas lahend $x = \frac{a}{b}$
9. $\forall a; b; c \in \mathbb{R}$ korral $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (korrutamise distributiivsus liitmise suhtes)

Kuna reaalarvude ja arvtelje punktide vahel on üksühene vastavus, siis iseloomustatakse reaalarvude piirkondi tihti arvtelje abil. Toome ära tähtsamad neist.

Valime 2 reaalarvu a ja b , kus $a < b$.

Piirkonnad:

- | | | |
|-----------------------------|-------------------|----------------|
| 1. Lõik a -st b -ni | $a \leq x \leq b$ | $[a; b]$ |
| 2. Vahemik a -st b -ni | $a < x < b$ | $]a; b[$ |
| 3. Poollõik a -st b -ni | $a < x \leq b$ | $(a; b]$ |
| | $a \leq x < b$ | $[a; b)$ |
| 4. Lõpmatu poollõik | $x \geq a$ | $[a; \infty)$ |
| | $x \leq b$ | $(-\infty; b]$ |
| 5. Lõpmatu vahemik | $x > a$ | $]a; \infty[$ |
| | $x < b$ | $]-\infty; b[$ |

ÜLESANDED

1. On antud järgmised hulgad :

A – HTG õpilaste hulk;

B – kogu linna koolide õpilaste hulk;

C - 10a klassi õpilaste hulk.

Järjesta need hulki tähistavad tähed nii, et iga eelmine oleks järgmise osahulgaks.

2. On antud hulgad :

A – täisarvude hulk;

B – paariarvude hulk;

C – paaritute arvude hulk;

D – negatiivsete arvude hulk;

E – mittenegatiivsete arvude hulk.

Millised nendest hulkadest osutuvad teiste antud hulkade osahulkadeks ?

3. Tähistagu C sõna „matemaatika” tähtede hulka ja D sõna „aritmeetika” tähtede hulka.
Leia $C \cup D$.

4. Leia paarisnaturaalarvude ja paaritute naturaalarvude ühend.

5. On antud täisarvude hulgad :

$$A = \{0;1;2;3;4;5;6;7\}$$

$$B = \{3;4;5;6;7;8;9\}$$

$$C = \{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$$

$$D = \{2;3;4;5;6\}$$

Leia järgmiste hulkade elemendid :

1) $A \cup B \cup C \cup D$;

2) $A \cap B \cap C \cap D$;

3) $(A \cap B) \cup (C \cap D)$;

4) $(A \cup B) \cap (C \cup D)$.

6. A on sõna „konsert” tähtede hulk, B sõna „teater” tähtede hulk. Leia hulkade $A \cup B$ ja $A \cap B$ elemendid.

7. On antud täisarvude hulgad :

$$M = \{-1;0;1;2;3;4;5\}$$

$$N = \{-2;-1;0;1;2;3\}$$

$$K = \{-3;-2;-1;0;1;2\}$$

$$P = \{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$$

Leia järgmiste hulkade elemendid :

1) $M \cup N \cup P \cup K$;

2) $M \cap N \cap P \cap K$;

3) $(M \cup N) \cap (K \cup P)$.

ARVU ÜLDKUJU ÜLESANDED

1. Kahekohalise arvu numbrite ümberpaigutamisel saadud arvu jagatis arvu endaga on 1. Arvu numbrite summa on 10. Kui suur on see arv? (55)
2. Leidke kahekohaline arv, teades, et tema numbrite summa on 9 ning numbrite vahetamisel saadakse sellest arvust 4,5 korda suurem arv. (18)
3. Kahekohalise arvu numbrite korrutis on 3 korda väiksem sellest arvust. Kui antud arvule liita 18, saame arvu, mis on kirjutatud samade numbritega, kuid vastupidises järjekorras. Leidke see arv. (24)
4. Kahekohalise arvu korrutis oma numbrite summaga on 418. Leidke see arv, kui üheliste number on kümnelite numbrist viie võrra suurem. (38)
5. Kui kahekohaline arv jagatakse tema numbrite summaga, saadakse jagatiseks 4. Selle arvu numbrite korrutis on 32. Leidke see arv. (48)
6. Kahekohalise arvu numbrite summa on 7. Numbrite ümberpaigutamisel saadakse esialgselt arvust üheksa võrra väiksem arv. Leidke see arv. (43)
7. Leidke kahekohaline arv, mille jagatis numbrite summaga on võrdne üheliste numbriga ning, mille kümnelite numbri kahekordne on üheliste numbrist 3 võrra suurem. (45)
8. Kahekohaline arv on võrdne oma ristsumma ruuduga ja pool kümnelite numbrist on üheliste numbrist 3 võrra suurem. Leidke see kahekohaline arv. (81)
9. Kahekohalise arvu kümnelite number on üheliste numbrist 2 võrra väiksem. Leidke see arv, teades, et ta on suurem kui 21 ja väiksem kui 38. (24 ja 35)
10. Kahekohalise arvu üheliste number on kolm korda suurem kümnelite numbrist. Leidke see arv, teades, et ta on suurem kui 10 ja väiksem kui 40. (13; 26 ja 39)
11. Milline kahekohaline arv on 4 korda suurem oma numbrite summast ja 3 korda suurem oma numbrite korrutisest? (24)
12. Kahekohalise arvu numbrite ruutude summa on võrdne arvuga 113. Kui liita antud arvule arv, millel on samad numbrid, kuid vastupidises järjekorras, saadakse 165. Leida see arv. (78 või 87)
13. Kahekohalise arvu numbrite ruutude summa on võrdne arvuga 13. Kui antud arvust lahutada 9, saadakse arv, mille numbrid on samad, kuid vastupidises järjekorras. Leida see arv. (32)
14. Kahekohalise arvu numbrite ruutude summa on 10. Kui vaadeldavast arvust lahutada 18, siis saadakse samade, kuid vastupidises järjekorras kirjutatud numbritega kahekohaline arv. Leida see arv. (31)
15. Ühest kolmekohalisest arvust saadakse numbrite järjekorra vastupidiseks muutmisel teine kolmekohaline arv. Milliste arvudega on tegemist, kui nende arvude summa on 1252, ristsumma on 14, numbrite ruutude summa aga 84? (824 või 428)
16. Kui jagada kahekohaline arv tema ristsummaga, siis saadakse mittetäielikuks jagatiseks 7 ja jäägiks 6. Kui aga jagada sama arv tema numbrite korrutisega, siis saadakse mittetäielikuks jagatiseks 3 ja jäägiks antud arvu ristsumma. Leida see arv. (83)
17. Kuuekohaline arv algab numbriga 2. Kui viia see number arvu algusest arvu lõppu, säilitades teiste numbrite järjekorra, saadakse arv, mis on 3 korda suurem esialgselt. Leida see arv. (285714)
18. Kolmekohaline arv lõpeb numbriga 3. Kui see number kanda arvu lõpust arvu algusesse, saadakse arv, mis on ühe võrra suurem kolmekordsest esialgselt arvust. Leida see arv. (103)
19. Kahe täisarvu summa on 1244. Kui esimesele neist lisada lõppu number 3, teisel arvul aga jätta lõpust ära number 2, saadakse üks ja sama arv. Leida need täisarvud. (12 ja 1232)

ÜLESANDED JUURDE- JA MAHAARVAMISE VALEMI KINNISTAMISEKS

1. Klassi 36 õpilasest laulavad laulukooris ja kuuluvad rahvatantsurühma 6 õpilast. Laulukoori kuulub kokku 16 õpilast ja rahvatantsurühma 8 õpilast. Mitu õpilast käib ainult laulukooris ? Mitu õpilast ei käi laulukooris ega rahvatantsurühmas ?
2. 100 üliõpilasest õpib inglise keelt 28, saksa keelt 30, prantsuse keelt 42, inglise ja saksa keelt 8, inglise ja prantsuse keelt 10, saksa ja prantsuse keelt 5. Korraga kõiki kolme keelt õpib 3 üliõpilast. Mitu üliõpilast õpib ainult üht võõrkeelt ? Mitu üliõpilast ei õpi ühtegi võõrkeelt ?
3. Uurimisinstituudis töötab 67 inimest. Neist 47 oskab inglise keelt, 35 saksa keelt ja 23 mõlemat keelt. Prantsuse keelt oskab 20 inimest. Inglise ja prantsuse keelt 12 inimest, saksa ja prantsuse keelt 11 inimest. Kõiki kolme keelt oskab 5 inimest. Mitu inimest ei oska ühtegi neist keeltest ?

KODUNE ÜLESANNE

Üks klassiorganisaator andis õpilaste kohta järgmised andmed: „Klassis on 45 õpilast, nendest 25 poissi. 30 last õpib neljadele ja viitele, nendest 16 poissi. Spordiga tegeleb 28 õpilast, nendest 18 poissi ja 17 õpilast, kes õpivad neljadele ja viitele. 15 poissi õpib neljadele ja viitele ning tegeleb ühtlasi spordiga.“

Mõne päeva pärast kutsus klassiorganisaatori välja klassijuhataja, kes nagu kiuste õpetas matemaatikat, ja ütles, et andmetes on viga. Katsu välja selgitada, kuidas ta seda teada sai.

ÜLESANDED JUURDE- JA MAHAARVAMISE VALEMI KINNISTAMISEKS

1. Klassi 36 õpilasest laulavad laulukooris ja kuuluvad rahvatantsurühma 6 õpilast. Laulukoori kuulub kokku 16 õpilast ja rahvatantsurühma 8 õpilast. Mitu õpilast käib ainult laulukooris ? Mitu õpilast ei käi laulukooris ega rahvatantsurühmas ?
2. 100 üliõpilasest õpib inglise keelt 28, saksa keelt 30, prantsuse keelt 42, inglise ja saksa keelt 8, inglise ja prantsuse keelt 10, saksa ja prantsuse keelt 5. Korraga kõiki kolme keelt õpib 3 üliõpilast. Mitu üliõpilast õpib ainult üht võõrkeelt ? Mitu üliõpilast ei õpi ühtegi võõrkeelt ?
3. Uurimisinstituudis töötab 67 inimest. Neist 47 oskab inglise keelt, 35 saksa keelt ja 23 mõlemat keelt. Prantsuse keelt oskab 20 inimest. Inglise ja prantsuse keelt 12 inimest, saksa ja prantsuse keelt 11 inimest. Kõiki kolme keelt oskab 5 inimest. Mitu inimest ei oska ühtegi neist keeltest ?

KODUNE ÜLESANNE

Üks klassiorganisaator andis õpilaste kohta järgmised andmed: „Klassis on 45 õpilast, nendest 25 poissi. 30 last õpib neljadele ja viitele, nendest 16 poissi. Spordiga tegeleb 28 õpilast, nendest 18 poissi ja 17 õpilast, kes õpivad neljadele ja viitele. 15 poissi õpib neljadele ja viitele ning tegeleb ühtlasi spordiga.“

Mõne päeva pärast kutsus klassiorganisaatori välja klassijuhataja, kes nagu kiuste õpetas matemaatikat, ja ütles, et andmetes on viga. Katsu välja selgitada, kuidas ta seda teada sai.

IRRATSIONAALAVALDISTE LIHTSUSTAMINE

1. $\sqrt{8a^3} + \sqrt{50a^3} - \sqrt{98a^3} - \sqrt{18a^3}$

2. $4\sqrt{12x^5} - 2\sqrt{48x^5} - 5\sqrt{75x^5} + \sqrt{192x^5}$

3. $\sqrt[3]{27ab} - \sqrt[3]{32a^3} + \sqrt[6]{a^2b^2} - \sqrt[5]{a^3}$

4. $\sqrt[3]{27x^2y} - 4\sqrt[6]{x^4y^2} - \sqrt[3]{8x^2y} + \sqrt[3]{48x^2y}$

5. $(\sqrt[3]{x} - \sqrt{xy}) \cdot \sqrt[3]{x^2y}$

6. $(\sqrt{2a} - \sqrt[3]{2a^2} + \sqrt[4]{a^3}) \cdot \sqrt{a}$

7. $(\sqrt[3]{x^2} + x\sqrt[4]{x^3})(x\sqrt{x} + \sqrt{x})$

8. $(\sqrt{a} - a\sqrt[3]{a^2})(\sqrt[3]{a^2} - a\sqrt{a})$

9. $(a + \sqrt[3]{b^2})(a - \sqrt[3]{b^2})$

10. $(\sqrt{a} - \sqrt[3]{a^2})^2$

11. $\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)$

12. $\left(\frac{a^{1.5} + b^{1.5}}{a-b} - \frac{a-b}{a^{0.5} + b^{0.5}}\right) \cdot \frac{a-b}{\sqrt{ab}}$

13. $\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} - \frac{12}{3-\sqrt{6}}\right)(\sqrt{6}+11)$

14. $\left(\frac{22}{\sqrt{5}+7} - \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \frac{9}{5-\sqrt{7}}\right)^2$

15. $\left(\frac{2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}} \cdot \frac{x-\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right) : 4\sqrt{xy}$

16. $\left(\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - \sqrt{xy}\right) : (x-y) + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

17. $\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1} - \frac{1}{a}\right)$

18. $\left(\frac{y-\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \sqrt{x}\right) : \left(\frac{y}{\sqrt{xy}-x} + \frac{x}{\sqrt{xy}+y} - \frac{x+y}{\sqrt{xy}}\right)$

19. $\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x\sqrt{y}-\sqrt{x}}\right) \cdot \frac{x\sqrt{xy}}{x+y} - \frac{2y}{x-y}$

20. $\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} + 4\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$

21. $\left(\frac{2+\sqrt{a}}{a+2\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}-2}{a-1}\right) \frac{a\sqrt{a}+a-\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}$

22. $\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

KODUSED ÜLESANDED I

1. Loetle kõik algarvud ühest sajani.
2. Esita arvud 1-20 kahe enama järjestikuse naturaalarvu summana. Leia kõik erinevad võimalused.
3. Numbrit 4 iga arvu jaoks neli korda kasutades moodusta kõik täisarvud ühest kümneni.
4. Lahuta algtegiureiks 392700.
5. Leia arvude 1632 ja 1824 suurim ühistegur.
6. Leia arvude 880, 105 ja 693 vähim ühiskordne.
7. Leia kolm järjestikust paaritud arvu, teades, et nende ruutude summa on 155.

KODUSED ÜLESANDED I

1. Loetle kõik algarvud ühest sajani.
2. Esita arvud 1-20 kahe enama järjestikuse naturaalarvu summana. Leia kõik erinevad võimalused.
3. Numbrit 4 iga arvu jaoks neli korda kasutades moodusta kõik täisarvud ühest kümneni.
4. Lahuta algtegiureiks 392700.
5. Leia arvude 1632 ja 1824 suurim ühistegur.
6. Leia arvude 880, 105 ja 693 vähim ühiskordne.
7. Leia kolm järjestikust paaritud arvu, teades, et nende ruutude summa on 155.

KODUSED ÜLESANDED I

1. Loetle kõik algarvud ühest sajani.
2. Esita arvud 1-20 kahe enama järjestikuse naturaalarvu summana. Leia kõik erinevad võimalused.
3. Numbrit 4 iga arvu jaoks neli korda kasutades moodusta kõik täisarvud ühest kümneni.
4. Lahuta algtegiureiks 392700.
5. Leia arvude 1632 ja 1824 suurim ühistegur.
6. Leia arvude 880, 105 ja 693 vähim ühiskordne.
7. Leia kolm järjestikust paaritud arvu, teades, et nende ruutude summa on 155.

KODUSED ÜLESANDED I

1. Loetle kõik algarvud ühest sajani.
2. Esita arvud 1-20 kahe enama järjestikuse naturaalarvu summana. Leia kõik erinevad võimalused.
3. Numbrit 4 iga arvu jaoks neli korda kasutades moodusta kõik täisarvud ühest kümneni.
4. Lahuta algtegiureiks 392700.
5. Leia arvude 1632 ja 1824 suurim ühistegur.
6. Leia arvude 880, 105 ja 693 vähim ühiskordne.
7. Leia kolm järjestikust paaritud arvu, teades, et nende ruutude summa on 155.

IRRATSIONAALAVALDISTE LIHTSUSTAMINE

1. $\sqrt{8a^3} + \sqrt{50a^3} - \sqrt{98a^3} - \sqrt{18a^3}$ $(-3a\sqrt{2a})$
2. $4\sqrt{12x^5} - 2\sqrt{48x^5} - 5\sqrt{75x^5} + \sqrt{192x^5}$ $(-17x^2\sqrt{3x})$
3. $\sqrt[3]{27ab} - \sqrt[5]{32a^3} + \sqrt[6]{a^2b^2} - \sqrt[5]{a^3}$ $(4\sqrt[3]{ab} - 3\sqrt[5]{a^3})$
4. $\sqrt[3]{27x^2y} - 4\sqrt[6]{x^4y^2} - \sqrt[3]{8x^2y} + \sqrt[3]{48x^2y}$ $(2\sqrt[3]{6x^2y} - 3\sqrt[3]{x^2y})$
5. $(\sqrt[3]{x} - \sqrt{xy}) \cdot \sqrt[3]{x^2y}$ $(x\sqrt[3]{y} - x\sqrt[6]{xy^5})$
6. $(\sqrt{2a} - \sqrt[3]{2a^2} + \sqrt[4]{a^3}) \cdot \sqrt{a}$ $(a\sqrt{2} - \sqrt[3]{2a^6}\sqrt{a} + a^4\sqrt{a})$
7. $(\sqrt[3]{x^2} + x^4\sqrt{x^3})(x\sqrt{x} + \sqrt{x})$ $(x(x+1)(\sqrt[6]{x} + x^4\sqrt{x}))$
8. $(\sqrt{a} - a\sqrt[3]{a^2})(\sqrt[3]{a^2} - a\sqrt{a})$ $(a^6\sqrt{a} - a^2 - a^2\sqrt[3]{a} + a^3\sqrt[6]{a})$
9. $(a + \sqrt[3]{b^2})(a - \sqrt[3]{b^2})$ $(a^2 - b\sqrt[3]{b})$
10. $(\sqrt{a} - \sqrt[3]{a^2})^2$ $(a - 2a\sqrt[6]{a} + a\sqrt[3]{a})$
11. $\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)$ (4)
12. $\left(\frac{a^{1.5} + b^{1.5}}{a-b} - \frac{a-b}{a^{0.5} + b^{0.5}}\right) \cdot \frac{a-b}{\sqrt{ab}}$ $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$
13. $\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} - \frac{12}{3-\sqrt{6}}\right)(\sqrt{6}+11)$ (-115)
14. $\left(\frac{22}{\sqrt{5}+7} - \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \frac{9}{5-\sqrt{7}}\right)^2$ (36)
15. $\left(\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \sqrt{xy}\right) : (x-y) + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ (1)
16. $\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}\right) \cdot \frac{x\sqrt{xy}}{x+y} - \frac{2y}{x-y}$ (2)
17. $\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} + 4\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ (4a)
18. $\left(\frac{2+\sqrt{a}}{a+2\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}-2}{a-1}\right) \frac{a\sqrt{a} + a - \sqrt{a} - 1}{\sqrt{a}}$ (2)
19. $\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ $\left(\frac{x\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\right)$
20. $\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \sqrt{ab}$ (a+b)

$$\begin{array}{ll}
1. \quad 3\sqrt{2} + 2\sqrt{32} + \frac{1}{2}\sqrt{128} = & 15\sqrt{2} \\
2. \quad 5 \cdot 3^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \cdot 3^{\frac{3}{2}} + (2^4 \cdot 3)^{\frac{1}{2}} = & 10\sqrt{3} \\
3. \quad 6\sqrt{2\frac{3}{4}} - 8\sqrt{3\frac{1}{4}} + \sqrt{176} + \sqrt{1300} - \sqrt{52} - \frac{1}{3}\sqrt{99} = & 6\sqrt{11} + 4\sqrt{13} \\
4. \quad 5\sqrt{a} - 3\sqrt{25a} + 2\sqrt{36a} + 2\sqrt{9a} = & 8\sqrt{a} \\
5. \quad \sqrt[3]{125x} - \sqrt[3]{8x} - (\sqrt[3]{27x} - \sqrt[3]{64x}) = & 4\sqrt[3]{x} \\
6. \quad \sqrt{9x} - \sqrt[3]{8y} - (\sqrt[3]{27y} - \sqrt{16x}) = & 7\sqrt{x} - 5\sqrt[3]{y} \\
7. \quad \sqrt{2x^7y^3} + \sqrt{8x^5y^5} + \sqrt{2x^3y^7} = & xy(x+y)^2\sqrt{2xy} \\
8. \quad (m^5n)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(2^4m^3n^3)^{\frac{1}{2}} + (mn^5)^{\frac{1}{2}} = & (m-n)^2\sqrt{mn} \\
9. \quad (3\sqrt{5} - 2)(3\sqrt{5} + 2) = & 43
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
1. \quad 3\sqrt{2} + 2\sqrt{32} + \frac{1}{2}\sqrt{128} = & 15\sqrt{2} \\
2. \quad 5 \cdot 3^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \cdot 3^{\frac{3}{2}} + (2^4 \cdot 3)^{\frac{1}{2}} = & 10\sqrt{3} \\
3. \quad 6\sqrt{2\frac{3}{4}} - 8\sqrt{3\frac{1}{4}} + \sqrt{176} + \sqrt{1300} - \sqrt{52} - \frac{1}{3}\sqrt{99} = & 6\sqrt{11} + 4\sqrt{13} \\
4. \quad 5\sqrt{a} - 3\sqrt{25a} + 2\sqrt{36a} + 2\sqrt{9a} = & 8\sqrt{a} \\
5. \quad \sqrt[3]{125x} - \sqrt[3]{8x} - (\sqrt[3]{27x} - \sqrt[3]{64x}) = & 4\sqrt[3]{x} \\
6. \quad \sqrt{9x} - \sqrt[3]{8y} - (\sqrt[3]{27y} - \sqrt{16x}) = & 7\sqrt{x} - 5\sqrt[3]{y} \\
7. \quad \sqrt{2x^7y^3} + \sqrt{8x^5y^5} + \sqrt{2x^3y^7} = & xy(x+y)^2\sqrt{2xy} \\
8. \quad (m^5n)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(2^4m^3n^3)^{\frac{1}{2}} + (mn^5)^{\frac{1}{2}} = & (m-n)^2\sqrt{mn} \\
9. \quad (3\sqrt{5} - 2)(3\sqrt{5} + 2) = & 43
\end{array}$$

RÜHMITAMISVÖTE

Näide:

$$xy - xz + 2y - 2z = x(y - z) + 2(y - z) = (y - z)(x + 2)$$

$$a^2 + a - 6 = a^2 - 2a + 3a - 6 = a(a - 2) + 3(a - 2) = (a + 3)(a - 2)$$

ÜLESANDED:

1. $c(m + n) - d(m + n)$;

2. $a(c - d) + (c - d)$;

3. $2x(r^2 + p^2) - 5y(r^2 + p^2)$;

4. $(a^2 - 1)c - (a^2 - 1)d$;

5. $a(b + c) + b + c$;

6. $m(a + b) + 2a + 2b$;

7. $rs - rt - p(s - t)$;

8. $x - y + b(x - y)$;

9. $ay + az + by + bz$;

10. $5m - 5n + pm - pn$;

11. $x^3 - 3x^2 - 3x + 9$;

12. $4x - 4y - ax + ay$;

13. $a + a^2 - a^3 - a^4$;

14. $12x^2 - 6xy + 3y^2 - 6xy$;

15. $8a^2y^2 - 12ay^3 - 6a^2 - 9ay$;

16. $a^2 + 5a + 6$;

17. $x^2 - 4x - 5$;

18. $m^2 - 7m + 12$;

19. $b^2 - b - 6$;

20. $\frac{x^2 + 6xy + 9y^2 - 4z^2}{9x^2 - 4z^2} \cdot \frac{2z^2 - 3xz}{x^2 + 3xy + 2xz}$;

21. $\frac{a^2 - 30cx + 10ax - 3ac}{x^2 - ax} \div \frac{a^2 - 100x^2}{a^2 - ax}$;

22. $\frac{a^4 - a^2 - 6a - 9}{a^4 + a^2} \div \frac{a^4 + 2a^3 + a^2 - 9}{a^6 + 1} \cdot \frac{a^4 + a^3 - 3a^2}{a^4 - a^2 + 1}$;

23. $\frac{a^{n+5} c^{n-3}}{b^{n-2}} \cdot \frac{b^{n-1}}{a^{n-5} c^{n-5}}$;

24. $\frac{x^{k-3} y^{2k+1}}{z^{k+1}} \cdot \frac{y^{k-1} z^k}{x^{k-4}}$.